



**Саровский физико-технический институт
Национального исследовательского ядерного университета МИФИ**

Элементы комбинаторики

Алексеев В.В.

**Саров
2016**



Литература:

1. Холл М. Комбинаторика. – М.: Мир, 1970.
2. Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. – М.: ФИМА, МЦНМО, 2006.
3. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969.



4. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2001.
5. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. – М.: Наука, 1975.
6. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику. – М.: Радио и связь, 1982.
7. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по курсу дискретной математики. – М.: Наука, 1992.



Основные правила комбинаторики

- **Правило суммы:** Если предмет А можно выбрать n способами, а предмет В - m способами, то выбор «либо А, либо В» можно выбрать $m+n$ способами.
- **Правило произведения:** Если необходимо последовательно выполнить k действий, причем первое действие можно выполнить n_1 способами, второе – n_2 способами и так далее до k -го действия, то общее количество действий N можно выполнить $N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$ способами, т.е. $N = \prod_{i=1}^k n_i$



Размещения с повторениями

- Имеются предметы n различных видов $a_1, a_2, \dots, a_n$ из которых составляются всевозможные расстановки длины k . Две расстановки считаются различными, если они отличаются типом входящих в них элементов или порядком размещения этих элементов в расстановке длины k . Такие расстановки называются **размещениями с повторениями из n по k** и обозначаются как $\tilde{A}_n^k$.

Число размещений с повторениями из n по k равно:

$$\tilde{A}_n^k = n^k$$



Размещения без повторений

- Имеется множество n различных видов $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, из которых составляются всевозможные расстановки длины k .
Размещением без повторений из n элементов по k называется всякая последовательность длины k , составленная из неповторяющихся элементов этого множества $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Число размещений без повторений из n по k равно:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$



Перестановки

- Имеется множество n различных видов $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. **Перестановкой** называется всякое размещение этого множества по n элементам.
- **Теорема.** Число перестановок n элементов равно

$$P_n = A_n^n = n!$$



Сочетания

- Имеется множество n различных элементов $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Всякое k -элементное подмножество этого множества называется **сочетанием** из n элементов по k элементов и обозначается, как правило, C_n^k .
- **Теорема.** Число всех k -элементных подмножеств множества из n элементов равно:

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\text{или } C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$$



Сочетания с повторениями

- Имеется множество n различных элементов $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. **Сочетанием** из n элементов по k элементов с повторениями называется совокупность, содержащая k элементов, причем каждый элемент принадлежит к одному из n типов.
- **Теорема.** Число различных сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов равно

$$\hat{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1}$$



Перестановки с повторениями

- Имеется множество n различных видов $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. **Перестановкой** с повторениями называется всякое размещение с повторениями длины n .
- **Теорема.** Пусть имеется n_1 предметов 1-го типа, n_2 предметов 2-го типа, ... n_k предметов k -го типа, и при этом $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Тогда число перестановок n элементов равно

$$P_n^k(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$



Бином Ньютона

• Теорема
$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

или в развернутом виде

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n a^0 b^n$$

Доказательство: (Методом мат. индукции по n).

При $n=1$ $(a + b)^1 = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1 = a + b$

(база индукции)

Пусть теорема справедлива для n (Индуктивное предположение). Покажем, что она справедлива при $n=n+1$ (Индукционный переход). По предложению индукции имеем:

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)^n \cdot (a + b) \stackrel{11}{=}$$



$$\begin{aligned} & (C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n a^0 b^n) \cdot (a + b) = \\ & = C_n^0 a^{n+1} b^0 + (C_n^1 a^n b + C_n^0 a^n b) + (C_n^2 a^{n-1} b^2 + C_n^1 a^{n-1} b^2) + \dots \\ & + C_n^n a^0 b^{n+1} = \end{aligned}$$

$$= C_{n+1}^0 a^{n+1} b^0 + C_{n+1}^1 a^n b + \dots + C_{n+1}^n a b^n + C_{n+1}^{n+1} a^0 b^{n+1}$$

в силу того, что $C_n^0 = C_{n+1}^0 = 1$ и $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$

Теорема доказана.

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right) = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{n+1}{k(n-k+1)} \right) = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = C_{n+1}^k \end{aligned}$$



Треугольник Паскаля

1									n=0
1	1								n=1
1	2	1							n=2
1	3	3	1						n=3
1	4	6	4	1					n=4
1	5	10	10	5	1				n=5
1	6	15	20	15	6	1			n=6
1	7	21	35	35	21	7	1		n=7



$$C_1^0$$

$$C_1^0 \quad C_1^1$$

$$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$$

$$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$$

$$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$$

$$C_5^1 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$$

$$C_6^0 \quad C_6^1 \quad C_6^2 \quad C_6^3 \quad C_6^4 \quad C_6^5 \quad C_6^6$$



Свойства биномиальных коэффициентов

- Формула симметрии: $C_{n+m}^n = C_{n+m}^m$;
- Формула сложения: $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$;
- Формула вынесения за скобки: $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$;
- Формула суммы биномиальных коэффициентов:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = \sum_{k=1}^n C_n^k = 2^n ;$$

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = \sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k = 0$$



Полиномиальная формула

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_k = n} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}$$

где суммирование ведется по всем решениям уравнения $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ в целых неотрицательных числах $n_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k$.



Метод включений и исключений

- Пусть A и B – конечные множества. Тогда

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| -$$

$$|A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



Теорема

- Если $A_1, A_2, \dots, A_n$ – некоторые конечные множества, то

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| +$$

$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-1} \sum_{1 \leq i < j < k < \dots < l \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap \dots \cap A_l|$$



Доказательство:

- Для доказательства необходимо показать, что каждый элемент из множества

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$ учитывается в правой части равенства только один раз.

Пусть $a \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$ есть элемент, который входит в состав m множеств A_i . Тогда элемент a подсчитывается в правой части $C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \dots + (-1)^{m-1} C_m^m$ раз.



Но

$$C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \dots + (-1)^{m-1} C_m^m = 1 - (C_m^0 - C_m^1 + C_m^2 - \dots + (-1)^m C_m^m) = 1 - \sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i = 1 - 0 = 1,$$

что означает, что каждый элемент

$$a \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$$

учитывается в правой части только один раз.



Субфакториал

- **Определение.** Перестановку из n элементов, в которой ни один элемент не находится на своем месте, называют **разупорядочиванием**. Обозначим как D_n . Если $P_n = A_n^n = n!$ - число перестановок n элементов, то согласно теореме включений исключений получаем:

$$D_n = P_n - C_n^1 P_{n-1} + C_n^2 P_{n-2} - \dots + (-1)^n C_n^n =$$
$$n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right]$$



Но, как известно, $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} = e^{-1}$

Получим оценку D_n :

$$D_n \approx n!e^{-1}.$$

Для факториала справедливо:

$$n! = (n-1)[(n-1)! + (n-2)!]$$

Покажем, что для D_n справедливо аналогичное утверждение:

$$D_n = (n-1) \cdot [D_{n-1} + D_{n-2}]$$



Действительно:

$$(n-1) \cdot [D_{n-1} + D_{n-2}] = (n-1)[(n-1)! + (n-2)!] \times$$

$$\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}\right) + (-1)^{n-1}(n-1)$$

$$\text{Заметим, что } (-1)^{n-1}(n-1) = n! \left(\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$$

Тогда получаем:



$$(n-1) \cdot [D_{n-1} + D_{n-2}] =$$

$$n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right] =$$

$$n! e^{-1} = D_n$$



Из этого следует, что

$$D_n - nD_{n-1} = -(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2})$$

Используя это соотношение несколько раз,
получаем формулу:

$$D_n - nD_{n-1} = (-1)^{n-2} (D_2 - 2D_1)$$

Но т.к. $D_2=1$, а $D_1=0$, то получаем

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$$



n	1	2	3	4	5	6	7
D_n	0	1	2	9	44	265	1854